

Exercice 01.1

$$A(3+2i); B(2-2i); C(-3i); D(-3); E(7); F(4i); G(-3+4i); J(i).$$

Exercice 01.2

$$\vec{u}(3+3i); \vec{v}(-5+i); \vec{w}(6i); \vec{z}(6); \vec{x}(5-3i); \vec{y}(3+3i).$$

$\vec{x} = \vec{u}$

Exercice 01.3

$$\begin{aligned} a) (1+i\sqrt{3})^2 &= 1^2 + 2 \times 1 \times (i\sqrt{3}) + (i\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{3}i - 3 \\ &= -2 + i2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$b) (\sqrt{3}-1)^2 = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1 = (4-2\sqrt{3}) + i \times 0.$$

Exercice 01.4

$$a) \frac{1}{i} = \frac{1 \times i}{i \times i} = \frac{i}{-1} = -i = 0 + i \times (-1).$$

$$b) -\frac{2}{3i} = -\frac{2 \times i}{3i \times i} = +\frac{2i}{3} = 0 + i \times \left(\frac{2}{3}\right).$$

Exercice 01.5

$$\begin{aligned} a) \frac{2+7i}{4-i} &= \frac{(2+7i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{8+4i+28i-14}{4^2 - (2i)^2} = \frac{-6+32i}{16+4} \\ &= -\frac{6}{20} + \frac{32}{20}i = -\frac{3}{10} + i \times \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

(on multiplie par la « quantité conjuguée »)

$$b) \frac{-1-2i}{4-i} = \frac{(-1-2i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{-4-i-8i-2}{4^2 - (i)^2} = \frac{-2-9i}{17} = -\frac{2}{17} + i \times \left(-\frac{9}{17}\right)$$

Exercice 01.6

$$\begin{aligned} a) \frac{2+iz}{2-iz} &= \frac{2+i}{2-i} \Leftrightarrow (2+iz)(2-i) = (2+i)(2-iz) \\ &\Leftrightarrow 4-2i+2iz-i^2z = 4-2iz+2i-i^2z \\ &\Leftrightarrow 2i(-1+z) = 2i(-z+1) \\ &\Leftrightarrow z-1 = -z+1 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \\ &\Leftrightarrow z = 1. \end{aligned}$$

(méthode que si $2-iz \neq 0$
 $iz \neq 2$
 $z \neq -2i$)

$S = \{1\}.$

$$b) \frac{2}{iz+\sqrt{3}} = \frac{iz+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = (iz+\sqrt{3})(iz+\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow 2^2 = (iz+\sqrt{3})^2$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{N'oublie pas que } iz+\sqrt{3} \neq 0 \\ iz \neq -\sqrt{3} \\ z \neq i\sqrt{3} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} iz+\sqrt{3} = 2 \\ \text{ou} \\ iz+\sqrt{3} = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} iz = 2-\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ iz = -2-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z = (2-\sqrt{3})i \\ \text{ou} \\ -z = (-2-\sqrt{3})i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = (-2+\sqrt{3})i \\ \text{ou} \\ z = (2+\sqrt{3})i \end{cases}$$

$$S = \{(-2+\sqrt{3})i; (2+\sqrt{3})i\}.$$

Il faut une multiplication par i qu'une division par i (on écrit d'habitude d'avoir i en dénominateur).

Exercice 01.7

$$1^o) z_1 = \frac{2+3i}{4+i} = \frac{(2-3i)}{(4-i)} ; \text{ ou } \frac{\bar{z}}{z'} = \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} \quad (\text{Pte 7.1, point 9}).$$

$$\text{Donc } z_1 = \overline{\left(\frac{2-3i}{4-i}\right)} = \bar{z}_2$$

$$2^o) \text{ On en déduit que: } \begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1) \\ z_1 - z_2 = 2i \operatorname{Im}(z_1) \end{cases}$$

$$\text{Or } z_1 = \frac{2+3i}{4+i} = \frac{(2+3i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{8-2i+12i+3}{4^2-i^2} = \frac{11+10i}{17} = \frac{11}{17} + \frac{10i}{17}$$

$$\text{Il Donc } z_1 + z_2 = \frac{22}{17} \quad \text{et} \quad z_1 - z_2 = 2i \times \frac{10}{17} = \frac{20i}{17}$$

Exercice 01.8

"grand classique"

$$\text{Soit } z \in \mathbb{C}. \quad P(z) = a(\bar{z})^2 + b\bar{z} + c$$

$$= a \overline{z^2} + b\bar{z} + c$$

$$= \overline{a z^2} + \overline{b z} + \overline{c}$$

$$= \overline{a z^2 + b z + c} = \overline{P(z)}.$$

Un réel est égal à son conjugué

Ainsi, si $P(z) = 0$, on a $\overline{P(z)} = \overline{0} = 0$
donc $P(\bar{z}) = 0$.

3/7

|| Si z est une solution de l'équation $P(z) = 0$, $\bar{z}$ en est une également.

Exercice 01.9

← "grand classique"

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ) j^2 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) 1 + j + j^2 &= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ) \text{ Soit } z \in \mathbb{C}. \quad (z-j)(z-\bar{j}) \\ = z^2 - z\bar{j} - zj + j\bar{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } j\bar{j} &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (z-j)(z-\bar{j}) &= z^2 - z\bar{j} - zj + 1 \\ &= z^2 - z(j + \bar{j}) + 1 \\ &= z^2 - z \times 2\operatorname{Re}(j) + 1 \\ &= z^2 - z \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= z^2 + z + 1. \end{aligned}$$

On a $j\bar{j} = 1$ et $\bar{j} = j^2$, donc $j\bar{j}^2 = 1$, c'est-à-dire $j^3 = 1$.

j est une « racine cubique de l'unité ».

$$a) z^2 - 6z + 10 = 0 \quad (E_1)$$

mod 1: $\Delta = -4$, $\begin{cases} z_1 = \frac{6-2i}{2} = 3-i \\ z_2 = \frac{6+2i}{2} = 3+i \end{cases}$

$$S = \{ 3-i; 3+i \}.$$

mod 2: $z^2 - 6z + 10 = (z-3)^2 + 1$

$$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} (z-3)^2 = -1 \\ (z-3)^2 = i^2 \end{cases}$$

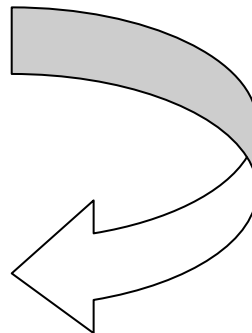
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-3 = i \\ z-3 = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3+i \\ z = 3-i \end{cases}$$

$$b) z^2 - 22z + 410 = 0$$

$$\Delta = -1156 = i^2 \times 36^2 = (36i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{22-36i}{2} = 11-17i \\ z_2 = \frac{22+36i}{2} = 11+17i \end{cases}$$

$$S = \{ 11-17i; 11+17i \}.$$



Exercise 01.11

1°) $\frac{z-2}{z-1} = i$ (E_1) est définie par $z \neq 1$.

(E_1) $\Leftrightarrow z-2 = i(z-1)$

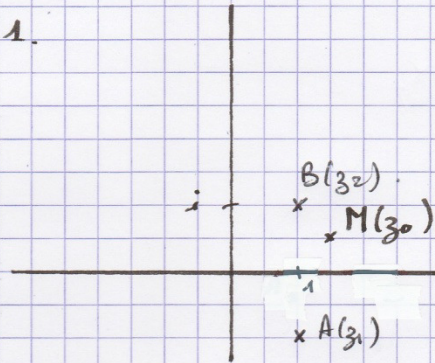
$\Leftrightarrow z-2 = iz-i$

$\Leftrightarrow (1-i)z = 2-i$

$\Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1-i}$

$\Leftrightarrow z = \frac{(2-i)(1+i)}{1-i^2} = \frac{2+2i-i+1}{2} = \frac{3+i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = z_0$

$S = \left\{ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$



2°) $\frac{z-2}{z-1} = z$ (E_2) est définie par $z \neq 1$

(E_2) $\Leftrightarrow z-2 = z(z-1)$

$\Leftrightarrow z-2 = z^2-z$

$\Leftrightarrow z^2-2z+2=0$

$\Delta = -4 = (2i)^2$

$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$; $z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$

$S = \{1-i; 1+i\}$

Exercise 01.12

Un grand classique!

$P(z) = z^4 - 1$

1°) $P(z) = (z^2)^2 - 1^2$

$= (z^2-1)(z^2+1)$

$= (z^2-1^2)(z^2-i^2)$

$= (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$

2°) Dans $\mathbb{C}$ une équation de degré n a exactement n solutions (dont certaines peuvent apparaître plusieurs fois).

$P(z) = 0 \Leftrightarrow$ ^{produit nul} $(z-1=0 \text{ ou } z+1=0 \text{ ou } z-i=0 \text{ ou } z+i=0)$

$S = \{-1; 1; -i; i\}$

3°) On pose $z = \frac{z_3+1}{z_3-1}$. (qui n'existe que pour $z_3 \neq 1$).

$$\left(\frac{z_3+1}{z_3-1} \right)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou} & \frac{z_3+1}{z_3-1} = 1 & (E_1) \\ \text{ou} & \frac{z_3+1}{z_3-1} = -1 & (E_2) \\ \text{ou} & \frac{z_3+1}{z_3-1} = i & (E_3) \\ \text{ou} & \frac{z_3+1}{z_3-1} = -i & (E_4). \end{cases}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow z_3+1 = z_3-1 \Leftrightarrow z_3 = -2 \quad \checkmark$$

$$(E_2) \Leftrightarrow z_3+1 = -z_3+1 \Leftrightarrow 3z_3 = 0 \Leftrightarrow z_3 = 0 \quad \checkmark$$

$$(E_3) \Leftrightarrow z_3+1 = iz_3-i \Leftrightarrow (2-i)z_3 = -1-i$$

$$\Leftrightarrow z_3 = \frac{-1-i}{2-i} = \frac{(-1-i)(2+i)}{4+1} = \frac{-2-i-2i+1}{5}$$

$$\Leftrightarrow z_3 = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad \checkmark$$

$$(E_4) \Leftrightarrow z_3+1 = -iz_3+i \Leftrightarrow (2+i)z_3 = i-1$$

$$\Leftrightarrow z_3 = \frac{i-1}{2+i} = \frac{(i-1)(2-i)}{4+1} = \frac{2i+1-2+i}{5}$$

$$\Leftrightarrow z_3 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Finalement, $S = \left\{ -2; 0; \left(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right); \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right) \right\}$.